

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КЛАССА НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ДВУМЯ ВИДАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Ине́сса И́зотовна Матвее́ва

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский
государственный университет,
Новосибирск, Россия

matveeva@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9390-2702>

*Посвящается моему научному руководителю
профессору Демиденко Геннадию Владимировичу*

Аннотация

Рассматривается класс систем неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с сосредоточенными и распределенными запаздываниями. Используя функционал Ляпунова – Красовского, установлены оценки, которые позволяют сделать вывод об устойчивости решений. В случае экспоненциальной устойчивости указаны оценки на множество притяжения и на скорость стабилизации решений на бесконечности.

Ключевые слова и фразы

системы нейтрального типа, переменные коэффициенты, оценки решений, устойчивость, множество притяжения, функционал Ляпунова – Красовского.

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367.

Для цитирования

Матвеева И. И. Оценки решений класса неавтономных нелинейных систем нейтрального типа с двумя видами запаздывания // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 114-131. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-114-131

Estimates for solutions to a class of nonautonomous nonlinear systems of neutral type with two kinds of delays

Inessa I. Matveeva

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University,
Novosibirsk, Russia

matveeva@math.nsc.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9390-2702>

Abstract

A class of systems of nonautonomous nonlinear differential equations of neutral type with concentrated and distributed delays is considered. Using a Lyapunov–Krasovskii functional, we establish estimates allowing us to conclude whether solutions are stable. In the case of exponential stability, estimates for an attraction set and a stabilization rate of the solutions at infinity are given. .

Keywords

systems of neutral type, variable coefficients, estimates for solutions, stability, attraction set, Lyapunov–Krasovskii functional.

Funding

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00367)

For citation

Matveeva I. I. Estimates for solutions to a class of nonautonomous nonlinear systems of neutral type with two kinds of delays // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 114-131. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-114-131

§ 1. Введение и постановка задачи

Уравнения с запаздыванием активно применяются при моделировании динамических процессов, в которых скорость протекания процесса зависит не только от текущего состояния, но и от значений в предшествующие моменты времени. Такие уравнения находят применения в медицине (моделирование иммунного ответа и распространения инфекций), экономике (динамика рынков), инженерных системах (управление роботами и транспортными потоками), экологии (динамика популяций) и др. Исследователей в первую очередь интересуют качественные свойства решений соответствующих дифференциальных уравнений, в том числе устойчивость.

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 114-131

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 114-131

Существует большое количество работ, посвященных изучению устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. [1]–[12] и библиографию в них). Один из подходов основан на использовании функционалов Ляпунова – Красовского. Этот метод обладает важными достоинствами: он дает конструктивные условия устойчивости и позволяет изучать системы различных типов (запаздывающего или нейтрального). Однако не каждый функционал Ляпунова – Красовского позволяет получать оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Много работ посвящено дифференциальным уравнениям с запаздыванием и постоянными коэффициентами. Однако в реальных задачах зачастую возникают сложные нелинейные неавтономные системы, в том числе с несколькими видами запаздывания (сосредоточенное и распределенное). Поэтому актуальной задачей остается построение подходящих функционалов и их применение для анализа поведения решений сложных систем уравнений с запаздыванием.

В работе мы рассматриваем системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t D(t, t-s)y(s) ds \\ + F\left(t, y(t), y(t - \tau), \frac{d}{dt}y(t - \tau)\right), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t, s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными элементами, т.е.

$$a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad d_{ij}(t, s) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0, \tau]), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания, $F(t, u_1, u_2, u_3)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция, которая является липшицевой по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $F(t, 0, 0, 0) = 0$.

Наша цель — получить оценки для решений системы (1.1) на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости нулевого решения и указать скорость стабилизации на бесконечности. Эта статья продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием (например, см. [13]–[17]). Мы исследовали системы с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Были установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности с использованием подходящих функционалов Ляпунова – Красовского.

В случае $C(t) \equiv 0$ системы вида (1.1) с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями исследованы в [18]. Неавтономные системы вида (1.1) при $C(t) \not\equiv 0$ с постоянными сосредоточенным и распределенным запаздываниями исследовались в [19]. Однако в указанной работе были исследованы только линейные системы ($F(t, u_1, u_2, u_3) \equiv 0$) и нелинейные системы, в которых вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет оценке линейного характера:

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \leq q_1 \|u_1\| + q_2 \|u_2\|, \quad t \geq 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad q_j \geq 0. \quad (1.2)$$

В этой статье мы рассматриваем неавтономные системы вида (1.1), в которых нелинейные слагаемые могут иметь рост выше первой степени. В работе мы указываем условия на начальные данные, при которых решение начальной задачи для системы (1.1) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, а также получаем оценки для решений. Используя эти неравенства, в случае экспоненциальной устойчивости мы указываем оценки на скорость стабилизации решений системы (1.1) на бесконечности. Во втором параграфе мы формулируем вспомогательные результаты из [19], с использованием которых в третьем параграфе мы доказываем основные результаты работы.

§ 2. Предварительные сведения

В [19] исследовались линейные системы вида (1.1) ($F(t, u_1, u_2, u_3) \equiv 0$). Для доказательства основных результатов нам потребуется одно из утверждений, установленных в указанной работе.

Вначале введем некоторые обозначения. Определим $(2n \times 2n)$ -матрицу

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}$$

такую, что

$$\mathcal{H}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t) \|u_1 - G(t)u_2\|^2, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

где $h(t) \in C([0, \infty))$, $h(t) \geq h_0 > 0$, $G(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными элементами. Определим матрицу $K(t, s)$, $t \geq 0$, $s \in [0, \tau]$, размера $(n \times n)$ такую, что

$$K(t, s) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0, \tau]), \quad K(t, s) = K^*(t, s), \quad K(t, s) > 0. \quad (2.3)$$

Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что S — положительно (отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц мы используем спектральную норму.

Определим матрицу

$$Q(t, s) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t, s) & Q_{12}(t, s) & Q_{13}(t, s) & Q_{14}(t, s) \\ Q_{12}^*(t, s) & Q_{22}(t, s) & Q_{23}(t, s) & Q_{24}(t, s) \\ Q_{13}^*(t, s) & Q_{23}^*(t, s) & Q_{33}(t, s) & Q_{34}(t, s) \\ Q_{14}^*(t, s) & Q_{24}^*(t, s) & Q_{34}^*(t, s) & Q_{44}(t, s) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

с элементами

$$\begin{aligned} Q_{11}(t, s) &= -\frac{d}{dt}H_1(t) - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) - K(t, 0), \\ Q_{12}(t, s) &= -\frac{d}{dt}H_2(t) - A^*(t)H_2(t) - H_1(t)B(t), \\ Q_{13}(t, s) &= -H_1(t)C(t) - H_2(t), \\ Q_{14}(t, s) &= -\tau H_1(t)D(t, s), \\ Q_{22}(t, s) &= -\frac{d}{dt}H_3(t) - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) + K(t, \tau), \\ Q_{23}(t, s) &= -H_2^*(t)C(t) - H_3(t), \\ Q_{24}(t, s) &= -\tau H_2^*(t)D(t, s), \\ Q_{33}(t, s) &= 0, \quad Q_{34}(t, s) = 0, \\ Q_{44}(t, s) &= -\tau \left(\frac{\partial}{\partial t}K(t, s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t, s) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим начальную задачу для линейной системы вида (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t - \tau) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t D(t, t-s)y(s) ds, \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. В [19] был установлен следующий результат.

Теорема 1 [19]. Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $K(t, s)$, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.3) и такие, что

$$\left\langle Q(t, s) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \tau k(t) \langle K(t, s) u_4, u_4 \rangle, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad s \in [0, \tau], \quad (2.7)$$

где $p(t)$, $k(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Тогда для решения $y(t)$ задачи (2.6) имеет место оценка

$$\|y(t) - G(t)y(t - \tau)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi\right), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

где матрица $G(t)$ определена в (2.2),

$$V(0, \varphi) = \left\langle \mathcal{H}(0) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{-\tau}^0 \langle K(0, -s) \varphi(s), \varphi(s) \rangle ds, \quad (2.9)$$

$$\gamma(t) = \min\{p(t), k(t)\}. \quad (2.10)$$

При доказательстве этой теоремы использовался следующий функционал Ляпунова – Красовского [17]:

$$V(t, y) = \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t, t-s) y(s), y(s) \rangle ds, \quad (2.11)$$

определенный на решении $y(t)$ задачи (2.6) с использованием матриц $\mathcal{H}(t)$, $K(t, s)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1 и вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет оценке

$$2 \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} F(t, u_1, u_2, u_3) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq q(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle^{1+\omega}, \quad t \geq 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

где $q(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $q(t) > 0$, $\omega > 0$. Отметим, что случай $\omega = 0$ исследован в [19], поскольку условие (1.2) можно заменить на менее ограничительное условие (2.12) и повторить соответствующие рассуждения из указанной работы.

В следующем параграфе мы сформулируем и докажем основные результаты работы.

§ 3. Основные результаты

В этом параграфе мы исследуем нелинейные системы вида (1.1) при условии, что вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$, определяющая нелинейные слагаемые, удовлетворяет условию (2.12). Рассмотрим начальную задачу для (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t - \tau) \\ &+ \int_{t-\tau}^t D(t, t-s)y(s) ds + F\left(t, y(t), y(t - \tau), \frac{d}{dt}y(t - \tau)\right), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений задачи (3.1).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и сходится интеграл*

$$R = \int_0^\infty q(\xi) \exp\left(-\omega \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi, \quad (3.2)$$

где $\gamma(t)$, $q(t)$ определены в (2.10), (2.12) соответственно. Тогда для решения начальной задачи (3.1) с начальной функцией $\varphi(t)$ такой, что

$$V(0, \varphi) < \left(\frac{1}{\omega R}\right)^{1/\omega}, \quad (3.3)$$

имеет место оценка

$$\|y(t) - G(t)y(t - \tau)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi\right)$$

$$\times (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/2\omega}, \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.1). Рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского $V(t, y)$, определенный в (2.11). Дифференцируя этот функционал, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, y) &= \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \langle K(t, 0)y(t), y(t) \rangle - \langle K(t, \tau)y(t-\tau), y(t-\tau) \rangle + \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t, t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Обозначим

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \int_{t-\tau}^t D(t, t-s)y(s) ds.$$

Поскольку $y(t)$ удовлетворяет (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, y) &= \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \langle K(t, 0)y(t), y(t) \rangle - \langle K(t, \tau)y(t-\tau), y(t-\tau) \rangle \\ &+ \int_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t, t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds + W(t), \end{aligned}$$

где

$$W(t) = 2 \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} F \left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau) \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Используя матрицу $Q(t, s)$, определенную в (2.4) и (2.5), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) = -\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left\langle Q(t, t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds + W(t).$$

В силу (2.7) и (2.12) мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, y) &\leq -p(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad -k(t) \int_{t-\tau}^t \langle K(t, t-s)y(s), y(s) \rangle ds \\ &\quad +q(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle^{1+\omega}. \end{aligned}$$

Согласно определению функционала Ляпунова – Красовского (2.11), мы имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) \leq -\gamma(t)V(t, y) + q(t)(V(t, y))^{1+\omega},$$

где функция $\gamma(t)$ определена в (2.10). Отсюда в силу неравенства Гронолла (см., например, [20]) получаем оценку

$$\begin{aligned} V(t, y) &\leq \exp \left(-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) V(0, \varphi) \\ &\times \left(1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega \int_0^t q(\xi) \exp \left(-\omega \int_0^\xi \gamma(s) ds \right) d\xi \right)^{-1/\omega}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $V(0, \varphi)$ определено в (2.9). Оценим функцию, стоящую в круглых скобках,

$$U(t) = 1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega \int_0^t q(\xi) \exp \left(-\omega \int_0^\xi \gamma(s) ds \right) d\xi$$

$$\geq 1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega \int_0^\infty q(\xi) \exp \left(-\omega \int_0^\xi \gamma(s) ds \right) d\xi = 1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R,$$

где R определено в (3.2). Если $\varphi(t)$ такая, что выполнено неравенство (3.3), то $U(t) > 0$. Следовательно, из (3.5) имеем неравенство

$$V(t, y) \leq \exp \left(-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) V(0, \varphi) (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/\omega}.$$

Используя (2.2), получаем

$$\begin{aligned} \|y(t) - G(t)y(t - \tau)\|^2 &\leq \frac{1}{h(t)} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t - \tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\leq \frac{V(t, y)}{h(t)} \leq \frac{V(0, \varphi)}{h(t)} \exp \left(-\int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/\omega}. \end{aligned}$$

Отсюда для решения начальной задачи (3.1) получаем оценку (3.4).

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $G(t) \equiv 0$ и выполнены условия теоремы 2.

А. Если $\tilde{\gamma}(t) = \int_0^t \gamma(s) ds \geq 0$, тогда нулевое решение системы (1.1)

устойчиво, при этом решение $y(t)$ задачи (3.1) удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h_0}} (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/2\omega}, \quad t > 0.$$

В. Если $\tilde{\gamma}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, тогда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво, при этом скорость стабилизации определяется функцией

$$\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(\xi) d\xi \right).$$

С. Если $\tilde{\gamma}(t) \geq \gamma_1 t + \gamma_2$ с $\gamma_1 > 0$, тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво, при этом решение $y(t)$ задачи (3.1) удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h_0}} \exp \left(-\frac{\gamma_1 t}{2} - \frac{\gamma_2}{2} \right) (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/2\omega}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим следующее функционально-разностное уравнение

$$x(t) = G(t)x(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

где $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $G(t)$ — матрица размера $(n \times n)$ с непрерывными элементами. Системы вида (3.6) в литературе часто называют непрерывными по времени разностными системами с запаздыванием (например, см. [21, 22, 23]). Предположим, что нулевое решение системы (3.6) экспоненциально устойчиво; т.е. справедлива следующая оценка

$$\|x(t)\| \leq a_1 e^{-a_2 t} \max_{s \in [-\tau, 0]} \|x_0(s)\|, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

где $a_1, a_2 > 0$, $x_0(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная начальная вектор-функция, причем $x(t) = x_0(t)$ при $t \in [-\tau, 0]$. Тогда, используя оценку (3.4), проводя такие же рассуждения как в [19], можно установить следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $G(t) \not\equiv 0$, выполнены условия теоремы 2 и нулевое решение системы (3.6) экспоненциально устойчиво. Если

$$\int_0^t \gamma(s) ds \geq \gamma_1 t + \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0,$$

тогда нулевое решение системы (1.1) экспоненциально устойчиво.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Если $\gamma_1 - 2a_2 < 0$, тогда для решения задачи (3.1) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(a_1 e^{-a_2 t} + d \left(1 - e^{(\gamma_1/2 - a_2)\tau} \right)^{-1} e^{-\gamma_1 t/2} \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|,$$

где

$$d = a_1 e^{a_2 \tau - \gamma_2/2} \frac{\sqrt{2\|\mathcal{H}(0)\| + \tau \max_{s \in [0, \tau]} \|K(0, s)\|}}{\sqrt{h_0}} (1 - \omega(V(0, \varphi))^\omega R)^{-1/2\omega}.$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Если $\gamma_1 - 2a_2 = 0$, тогда для решения задачи (3.1) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(a_1 e^{-a_2 t} + d \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\gamma_1 t/2} \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|.$$

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Если $\gamma_1 - 2a_2 > 0$, тогда для решения задачи (3.1) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(a_1 e^{-a_2 t} + d \left(e^{(\gamma_1/2 - a_2)\tau} - 1 \right)^{-1} e^{\gamma_1(1-r)\tau/2} e^{-r\gamma_1 t/2} \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|,$$

где $0 < r < \frac{2a_2}{\gamma_1}$.

Замечание. При выполнении условий теоремы 3 неравенство (3.3) дает оценку на множество притяжения, при этом условие сходимости интеграла в (3.2) можно заменить на условие сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} q(\xi) e^{-\omega \gamma_1 \xi} d\xi.$$

Чтобы использовать теорему 3 и соответствующие следствия, нам нужно определить a_1, a_2 в (3.7). Если $G(t)$ — постоянная матрица ($G(t) \equiv G$), то, используя эрмитово решение $L > 0$ дискретного уравнения Ляпунова [24, 25]

$$L - G^* L G = I,$$

можно взять

$$a_1 = \sqrt{\mu(L)}, \quad a_2 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{\|L\|}\right)}{2\tau},$$

где $\mu(L) = l_{\min}^{-1} \|L\|$, $l_{\min} \geq 1$ — минимальное собственное число матрицы L .

Если $G(t)$ — T -периодическая матрица с непрерывными элементами, то, используя эрмитово непрерывное T -периодическое решение $L(t) > 0$ функционально-разностного уравнения Ляпунова [26, 27, 28]

$$L(t - \tau) - G^*(t) L(t) G(t) = I, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

можно взять

$$a_1 = \sqrt{\mu(L)}, \quad a_2 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{L_{\max}}\right)}{2\tau},$$

где $\mu(L) = l^{\min} L_{\max}$, $l^{\min} = \left(\min_{s \in [0, T]} l_{\min}(s)\right)^{-1}$, $L_{\max} = \max_{s \in [0, T]} \|L(s)\|$, $l_{\min}(t) \geq 1$ — минимальное собственное значение матрицы $L(t)$.

Если $G(t)$ — матрица с непрерывными элементами, то, используя эрмитово непрерывное ограниченное решение $L(t) > 0$ функционально-разностного уравнения Ляпунова (3.8), можно взять [19]

$$a_1 = \sqrt{\mu(L)}, \quad a_2 = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{L_{\sup}}\right)}{2\tau}.$$

где $\mu(L) = l^{\min} L_{\sup}$, $l^{\min} = \left(\min_{s \geq 0} l_{\min}(s)\right)^{-1}$, $L_{\sup} = \sup_{s \geq 0} \|L(s)\|$, $l_{\min}(t) \geq 1$ — минимальное собственное значение матрицы $L(t)$.

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. М.: Наука, 1971.
2. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. М.: Мир, 1984.
3. Кореневский Д. Г. *Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии*. Киев: Наукова думка, 1989.
4. *Избранные труды Н. В. Азбелева*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
5. Долгий Ю. Ф. *Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений*. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.
6. Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В. *Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем*. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.
7. Kolmanovskii V. B. and Myshkis A. D. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations* / Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
8. Michiels W. and Niculescu S. I. *Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach* / Advances in Design and Control, V. 27. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
9. Agarwal R. P., Berezensky L., Braverman E., and Domoshnitsky A. *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications*. New York: Springer, 2012.
10. Kharitonov V. L. *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices* / Control Engineering. New York: Birkhäuser, Springer, 2013.
11. Gil' M. I. *Stability of Neutral Functional Differential Equations* / Atlantis Studies in Differential Equations, V. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.
12. Park J. H., Lee T. H., Liu Y., and Chen J. *Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control*. Singapore: Springer, 2019.

13. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. мат. журн.* 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
14. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
15. Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
16. Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сиб. мат. журн.* 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
17. Матвеева И. И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.
18. Matveeva I. I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2021. Т. 18, № 2. С. 1689–1697.
19. Матвеева И. И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с сосредоточенным и распределенным запаздываниями // *Журн. вычисл. матем. мат. физ.* 2024. Т. 64, № 8. С. 1486–1499.
20. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1970.
21. Gu K. Stability problem of systems with multiple delay channels // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 743–751.
22. Damak S., Di Loreto M., Mondié S., and Brun X. Exponential stability with decay rate estimation for linear difference equations // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2016. V. 61, N 1. P. 252–257.
23. Melchor-Aguilar D. On Lyapunov functionals for linear functional difference equations // *Systems & Control Letters*. 2019. V. 127. P. 1–5.
24. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1970.

25. Годунов С. К. *Современные аспекты линейной алгебры*. Новосибирск: Научная книга, 1997.
26. Demidenko G. V. Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // *J. Comput. Math. Optim.* 2010. V. 6, N 1. P. 1–12.
27. Demidenko G. V. and Matveeva I. I. On estimates of solutions to one class of functional difference equations with periodic coefficients // *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov* / Eds. G. V. Demidenko, E. Romenski, E. Toro, and M. Dumbser Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 101–109.
28. Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2020. Т. 17. С. 416–427.

References

1. El'sgol'ts L. E. and Norkin S. B. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Math. Sci. Eng., V. 105. New York, London: Academic Press, 1973.
2. Hale J. K. *Theory of Functional Differential Equations*. Appl. Math. Sci., V. 3. New York, Heidelberg, Berlin: Springer, 1977.
3. Korenevskii D. G. *Stability of Dynamical Systems under Random Perturbations of Parameters. Algebraic Criteria*. Kiev: Naukova Dumka, 1989.
4. Azbelev N. V. *Selected Works*. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Science, 2012.
5. Dolgii Yu. F. *Stability of Periodic Differential-Difference Equations*. Yekaterinburg: Ural University, 1996.
6. Khusainov D. Ya. and Shatyrko A. V. *The Method of Lyapunov Functions in the Study of the Stability of Functional-Differential Systems*. Kiev: Kiev University, 1997.
7. Kolmanovskii V. B. and Myshkis A. D. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations* / Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

8. Michiels W. and Niculescu S. I. *Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach* / Advances in Design and Control, V.27. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
9. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., and Domoshnitsky A. *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications*. New York: Springer, 2012.
10. Kharitonov V. L. *Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices* / Control Engineering. New York: Birkhäuser, Springer, 2013.
11. Gil' M. I. *Stability of Neutral Functional Differential Equations* / Atlantis Studies in Differential Equations, V. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.
12. Park J. H., Lee T. H., Liu Y., and Chen J. *Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control*. Singapore: Springer, 2019.
13. Demidenko G. V. and Matveeva I. I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Sib. Math. J.* 2007. V. 48, N 5. P. 824–836.
14. Demidenko G. V. and Matveeva I. I. On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients // *Sib. Math. J.* 2014. V. 55, N 5. P. 866–881.
15. Matveeva I. I. On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems // *Sib. Math. J.* 2017. V. 58, N 2. P. 264–270.
16. Demidenko G. V., Matveeva I. I., and Skvortsova M. A. Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Sib. Math. J.* 2019. V. 60, N 5. P. 828–841.
17. Matveeva I. I. Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2019. V. 13, N 3. P. 511–518.
18. Matveeva I. I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // *Sib. Electr. Math. Reports*. 2021. V. 18, N 2. P. 1689–1697.
19. Matveeva I. I. Estimates of solutions for a class of nonautonomous systems of neutral type with concentrated and distributed delays *Comp. Math. Math. Phys.* 2024. V. 64, N 8. C. 1796–1808.

20. Hartman Ph. *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.
21. Gu K. Stability problem of systems with multiple delay channels // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 743–751.
22. Damak S., Di Loreto M., Mondié S., and Brun X. Exponential stability with decay rate estimation for linear difference equations // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2016. V. 61, N 1. P. 252–257.
23. Melchor-Aguilar D. On Lyapunov functionals for linear functional difference equations // *Systems & Control Letters*. 2019. V. 127. P. 1–5.
24. Daleckii Ju. L. and Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Providence: Am. Math. Soc., 1974.
25. Godunov S. K. *Modern Aspects of Linear Algebra*. Providence: Am. Math. Soc., 1998.
26. Demidenko G. V. Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // *J. Comput. Math. Optim.* 2010. V. 6, N 1. P. 1–12.
27. Demidenko G. V. and Matveeva I. I. On estimates of solutions to one class of functional difference equations with periodic coefficients // *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov* / Eds. G. V. Demidenko, E. Romenski, E. Toro, and M. Dumbser Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 101–109.
28. Yskak T. Estimates for solutions of one class of systems of differential equations of neutral type with distributed delay // *Sib. Electr. Math. Reports*. 2020. V. 17. P. 416–427.

Информация об авторе

Инеcса Изотовна Матвеева, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 8973-3918 AuthorID: 5372
Scopus Author ID 7006445422

Author Information

Inessa I. Matveeva, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 114-131

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 114-131

SPIN 8973-3918 AuthorID: 5372

Scopus Author ID 7006445422

*Статья поступила в редакцию 03.08.2025;
одобрена после рецензирования 16.09.25.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 03.08.2025;
approved after reviewing 16.09.25.2025; accepted for publication 05.11.2025*

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 114-131

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 114-131